Analysis of the systems described by the numeric series via Hurst exponent
Shishkov V.[1], Alymov A.[2] (Russian Federation)
Анализ систем, описываемых числовыми рядами с помощью показателя Херста
Шишков В. В.[1], Алымов А. С.[2] (Российская Федерация)

[1]Шишков Владислав Валерьевич / Shishkov Vladislav – студент;
[2]Алымов Алексей Сергеевич / Alymov Alexey – студент,
кафедра информационных технологий и систем,
Институт информационных технологий
Московский государственный технический университет радиотехники электроники и автоматики,
г. Москва

Аннотация: *в статье рассматривается способ различения случайного и фрактального числовых рядов с помощью показателя Херста.*
Abstract: *in the article we described a way of identify differences between normally distributed and fractal distributed numerical series using Hurst index.*

Ключевые слова: *анализ, показатель Херста, числовые ряды, нормальное распределение, фрактальный анализ.*
Keywords: *analysis, Hurst index, numerical series, normal distribution, fractal analysis.*

Существует множество различных систем (от солнечных пятен, среднегодовых значений выпадения осадков и до финансовых рынков, временных рядов экономических показателей) и зачастую числовые ряды, описывающие их характеристики, не являются нормально-распределенными или близкими к ним. Для анализа таких систем Херстом [1] был предложен метод Нормированного размаха (RS-анализ). Главным образом данный метод позволяет различить случайный и фрактальный временные ряды, а также делать выводы о наличии непериодических циклов, долговременной памяти и т.д.

1) Дан исходный ряд S_t. Рассчитаем логарифмические отношения: $$Nt = \ln \frac{St}{St-1} \qquad (1)$$

2) Разделим ряд N на A смежных периодов длиной n. Отметим каждый период как I_a, где a = 1,2,…,A. Определим для каждого I_a среднее значение:

$$E(I_a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} N_{k,a} \qquad (2)$$

3) Рассчитаем отклонения от среднего значения для каждого периода I_a:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^{k}(N_{i,a} - E(I_a)) \qquad (3)$$

4) Рассчитаем размах в пределах каждого периода:

$$R_{Ia} = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a}) \qquad (4)$$

5) Рассчитаем стандартное отклонение для каждого периода I_a:

$$S_{I_a} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(N_{k,a} - E(I_a))^2} \qquad (5)$$

6) Каждый R_{I_a} делим на S_{I_a}. Далее рассчитываем среднее значение *R/S*:

$$R/S(n) = \frac{\sum_{a=1}^{A} R/S(A)}{A} \qquad (6)$$

7) Увеличиваем n и повторяем шаги 2-6 до тех пор, пока $n \leq N/2$

8) Строим график зависимости $\log(R/S(n))$ от $\log(n)$ и с помощью МНК находим регрессию вида: $\log(R/S(n)) = H \cdot \log(n) + c$, где *H* – показатель Херста (см. рисунок) [2].

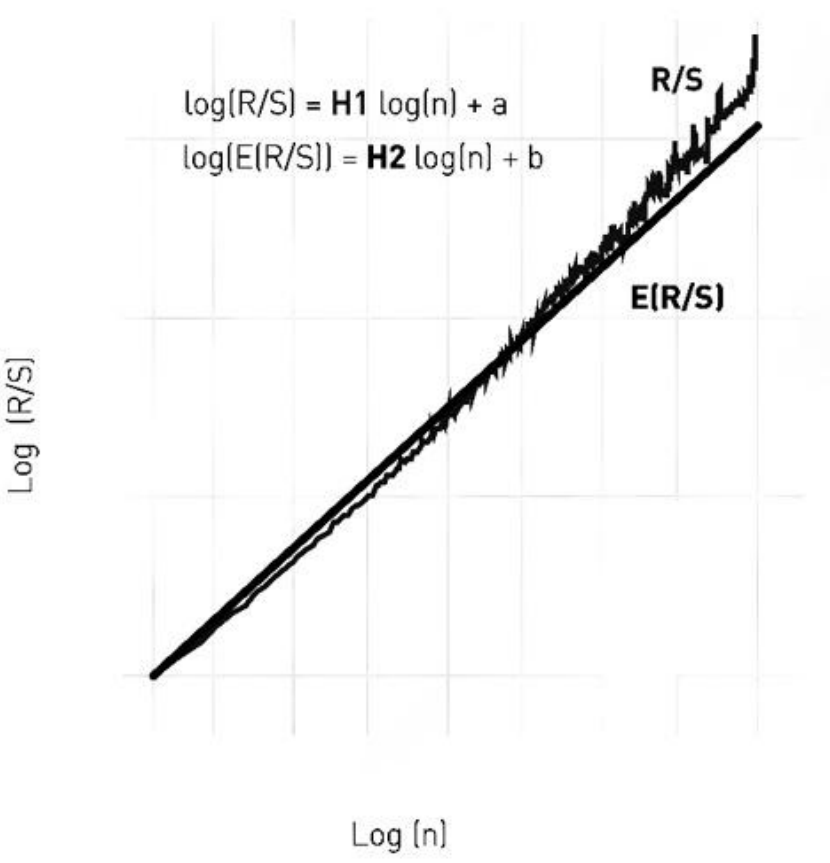

Рис. 1. График зависимости $\log(R/S(n))$ *от* $\log(n)$

Экспонента Хёрста, показатель Хёрста или коэффициент Хёрста — мера, используемая в анализе временных рядов. Эта величина уменьшается, когда задержка между двумя одинаковыми парами значений во временном ряду увеличивается. Впервые это понятие использовалось в гидрологии в практических целях для определения размеров плотины на реке Нил в условиях непредсказуемых дождей и засух, наблюдаемых в течение длительного времени. Название «Экспонента Херста» или «Коэффициент Херста» дано в честь Гарольда Эдвина Хёрста — ведущего исследователя того времени в этой области. Стандартное обозначение *H* также дано в честь него [3].

Далее проверяем полученный результат на значимость. Для этого проверяем гипотезу о том, что анализируемая структура является нормально-распределенной. *R/S* являются случайными переменными, нормально распределенными, тогда можно предположить, что *H* также распределены нормально. Асимптотическим пределом для независимого процесса является показатель Херста равный 0.5. Энис и Ллойд [4], а также Петерс [5] предложили использовать следующие ожидаемые показатели *R/S*:

$$E(R/S(n)) = \frac{n-0.5}{n} \cdot (n \cdot \frac{\pi}{2})^{-0.5} \cdot \sum_{r=1}^{n-r} \sqrt{\frac{n-r}{n}} \qquad (7)$$

Для *n* наблюдений находим ожидаемый показатель Херста: $E(H)$.

Ожидаемая дисперсия будет следующей: $D(H) = 1/T$, где *T* — количество наблюдений в выборке.

Выборочная статистика: $Z = \frac{|E(H) - H|}{D(H)}$. (8)

Сравниваем ее с критическим значением нормированного нормального распределения.

Если выборочное значение меньше критического, то гипотезу о нормальном распределении системы не отвергаем на данном уровне значимости. Структура случайна и имеет нормальный закон распределения.

Литература

1. *Херст Г. Э.* Долгосрочная вместимость водохранилищ. Труды Американского общества гражданских инженеров, 1951. 116 с.
2. *Habrahabr.ru* RS-анализ (анализ фрактальной структуры временных рядов). [Электронный ресурс]. URL: https://habrahabr.ru/post/256381/
3. *Калуш Ю. А., Логинов В. М.* Показатель Хёрста и его скрытые свойства. Сиб. журн. индустр. Матем, 2002. т. 5, вып. 4. 29-37 с.
4. *Anis A. A., Lloyd E. H.* The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands. Biometrica 63, 1976. 283-298 с.
5. *Peters E. E.* Fractal Market Analysis. Wiley. New York, 1994.