DISCRETE ACCELERATOR WITH MEMORY IN MACROECONOMICS

Tarasova V.V.[1], Tarasov V.E.[2] (Russian Federation) Email: Tarasova229@scientifictext.ru

[1]Tarasova Valentina Vasil'evna – Master Student,
BUSINESS SCHOOL,
LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY;
[2]Tarasov Vasily Evgen'evich – Leading Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
SKOBELTSYN INSTITUTE OF NUCLEAR PHYSICS,
LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,
MOSCOW

Abstract: *this article proposes accelerators with power-law memory to formulate discrete macroeconomic models. As a basis to describe the discrete accelerators, the principle of capital stock adjustment is used. It is shown that the standard discrete accelerators that do not take into account the memory effects actually describe economic processes with periodic sharp bursts (kicks). The proposed discrete accelerators with memory allow us to describe economic processes with power-law memory and periodic bursts. In models with continuous time, the accelerators with memory are described by fractional differential equations. In models with discrete time, the accelerators with memory are described by discrete mapps with memory, which are obtained from the fractional differential equations without using any approximations. Mapps with memory are derived by using the equivalence of fractional differential equations and the Volterra integral equations of the second kind.*
Keywords*: accelerator, dynamic memory, macroeconomics, discrete maps with memory, fractional derivatives*.

ДИСКРЕТНЫЙ АКСЕЛЕРАТОР С ПАМЯТЬЮ В МАКРОЭКОНОМИКЕ

Тарасова В.В.[1], Тарасов В.Е.[2] (Российская Федерация)

[1]Тарасова Валентина Васильевна – магистрант,
Высшая школа бизнеса,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
[2]Тарасов Василий Евгеньевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва

Аннотация: *в данной статье предлагаются акселераторы со степенной памятью для построения дискретных макроэкономических моделей. В качестве основы описания дискретных акселераторов используется принцип корректировки основного капитала. Показывается, что стандартные дискретные акселераторы, не учитывающие эффекты памяти, фактически описывают экономические процессы с периодическими резкими всплесками. Предлагаемые дискретные акселераторы с памятью позволяют описывать экономические процессы со степенной памятью и периодическими всплесками. В моделях с непрерывным временем акселераторы с памятью описываются дробными дифференциальными уравнениями. В моделях с дискретным временем акселераторы с памятью описываются дискретными отображениями с памятью, полученными из дробных дифференциальных уравнений без использования каких-либо приближений и аппроксимаций. Отображения с памятью выводятся, используя эквивалентность дробных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Вольтерра второго рода.*
Ключевые слова: *акселератор, динамическая память, макроэкономика, дискретные отображения с памятью, дробные производные*.

1. Введение

Одним из основных понятий макроэкономики является понятие акселератора [1, 2, 3]. Уравнения акселератора могут быть записаны в рамках подходов с непрерывным и с дискретным временем. Стандартное определение акселератора не учитывает эффекты динамической памяти [4, 5, 6]. Понятие динамической памяти позволяет учитывать, что экономические агенты могу помнить историю изменений экзогенных и эндогенных переменных, и тем самым могут учитывать эти изменения при принятии экономических решений. В работах [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] были предложены базовые экономические понятия для процессов с динамической памятью. Среди них, были предложены понятия акселератора и мультипликатора с памятью [7], предельной величины нецелого порядка [8, 9, 10, 11], эластичности процессов с памятью [12, 13], меры неприятия риска для инвесторов с памятью [14, 15], а также обобщение методов детерминированного анализа [16]. В данной работе будет рассмотрено точное соответствие между дискретным и непрерывным описанием акселератора в экономических процессах со степенной динамической памятью. Сначала будет доказано, что уравнения стандартного дискретного акселератора, которое содержит стандартные конечные разности целого порядка, может быть получено из дифференциальных уравнений с периодическими резкими всплесками. Далее, используя обобщение этих дифференциальных уравнений, в котором учитываются эффекты динамической памяти, будут получены уравнения дискретного акселератора с памятью в виде дискретных отображений с памятью.

2. Акселератор без динамической памяти

В моделях с непрерывным временем, простейшее уравнение стандартного акселератора [1, с. 73], не учитывающее эффекты запаздывания и памяти, описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Например,

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{v} \cdot I(t), \qquad (1)$$

где $Y(t)$ – функция, описывающая величину выпуска продукции в момент времени t, $dY(t)/dt$ – скорость изменения выпуска продукции (дохода) в момент времени t, I(t) – функция, описывающая индуцированные капиталовложения в момент времени t, v – положительная постоянная, называемая коэффициентом инвестиций (коэффициентом акселератора) и характеризующая мощность акселератора, [1, с. 73]. Множитель v также называется коэффициентом капиталоемкости прироста дохода [2, с. 91], $1/v$ – предельная производительность капитала (норма акселерации), [2, с. 91]. Уравнение (1) означает, что индуцированные инвестиции представляют собой неизменную долю текущей скорости изменения выпуска продукции [1, с. 73].

В моделях с дискретным временем, акселератор без запаздывания и памяти записывается [1, с. 74] в виде конечно-разностного уравнения

$$Y_n - Y_{n-1} = \frac{T}{v} \cdot I_n, \qquad (2)$$

где $Y_n = Y(nT)$ и $I_n = I(nT)$, а T – положительная постоянная, характеризующая масштаб времени. Если T=1, тогда t=n и $Y_n = Y_t$. В этом случае, уравнение (2) принимает вид $I_t = v \cdot (Y_t - Y_{t-1})$. Уравнение (2) означает, что индуцированные капиталовложения зависят от изменения текущего выпуска продукции [1, с. 74].

3. Принцип корректировки основного капитала

Существует альтернативный подход к уравнению акселератора, предложенный Мэттьюсом [17] в виде принципа корректировки основного капитала.

Рассмотрим основной капитал K(t), который можно принять как изменяющийся, и поэтому уровень чистых инвестиций I(t) зависит от K(t) [3, с. 68]. Инвестиции I(t) должны зависеть от прибыли, которая является как показателем рентабельности производства (или уровня спроса), так и одним из источников финансирования инвестиций. В общем случае мы можем взять доход Y(t), вместо прибыли, как показатель уровня спроса и наличия финансов. Используя этот подход, можно написать инвестиционную функцию I=I(Y,K), где мы пренебрегаем влиянием процентной ставки. В линейном случае функция инвестиций линейна по Y(t) и K(t), и ее можно записать в виде

$$I(Y(t), K(t),) = a \cdot Y(t) - b \cdot K(t), \qquad (3)$$

где a и b являются положительными коэффициентами функции инвестиций. Этот случай соответствует принципу корректировки основного капитала, предложенному Мэттьюсом [17].

Мы можем рассматривать уравнение акселератора, исходя из линейной инвестиционной функции (3) на основе принципа корректировки основного капитала Мэттьюса [3, 17]. Для частного случая, когда используем b=1 и T=1, имеем [3, с. 73] уравнение

$$a \cdot Y_t = K_t + I_t = K_{t+1}. \qquad (4)$$

В этом случае получаем $K_{t+1} = a \cdot I_t$ и $K_t = a \cdot I_{t-1}$, что приводит к уравнению

$$I_t = K_{t+1} - K_t = a \cdot (Y_t - Y_{t-1}). \qquad (5)$$

В результате уравнение акселератора получается как частный случай (a=v, b=1, T=1) принципа корректировки основного капитала.

Рассмотрим дискретную модель Харрода-Домара, которая записывается для периодов. Переменными для последовательности периодов t=0, T, 2T, ... являются следующие величины [3, с. 204]: выпуск продукции (доход) Y_n, как поток за период t=nT; капитал K_n, рассчитанный на начало периода; инвестиции I_n в период t=nT [3, с. 204]. Для модели Харрода-Домара уравнение «инвестиции = сбережения» (см. уравнение 1 раздела 11.4 в [3, с. 204]) имеет вид

$$K_{n+1} - K_n = s \cdot T \cdot Y_n, \qquad (6)$$

где параметр s является постоянной, характеризующей склонность к сохранению. Для T=1, уравнение (6) имеет вид $K_{t+1} - K_t = s \cdot Y_t$. В моделях с непрерывным временем, уравнение (6) записывается (см. уравнение 1 раздела 11.2 в [3, с. 199]) в виде

$$\frac{dK(t)}{dt} = s \cdot Y(t), \qquad (7)$$

где $dK(t)/dt$ – производная первого порядка функции основного капитала K(t).

Эта формулировка может быть ослаблена [3, с. 204-205], отказавшись от явной ссылки на основной капитал и производственную функцию. Тогда уравнение для полной загрузки производственных мощностей (см. уравнение 4 раздела 11.4 в [3, с. 205]) имеет вид

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{T}{v} \cdot I_n, \qquad (8)$$

где v – фиксированный коэффициент производственной функции. Для T=1, уравнение (8) принимает вид $I_t = v \cdot (Y_{t+1} - Y_t)$. В моделях с непрерывным временем, уравнение (8) рассматривается (см. уравнение 1 раздела 11.2 в [3, с. 199]) в виде (1), где $dY(t)/dt$ – производная первого порядка функции дохода Y(t).

Версия мультипликатора-акселератора представляет собой вариант (8), в котором условие полной загрузки производственных мощностей изменяется (обращается, инвертируется) [3, с. 205] при интерпретации лидерства задержки (временного лага), чтобы задать инвестиционную функцию уравнением (3).

4. Взаимосвязь дискретного и непрерывного описания

Уравнения (2), (8) и (6) нельзя рассматривать как точные дискретные аналоги уравнения (1) и (7), соответственно. Это обусловлено тем, что стандартные конечные разности, такие как прямая разность $\Delta^1_{\text{forward}} Y(t) \coloneqq Y(t+1) - Y(t)$, и обратная разность $\Delta^1_{\text{backward}} Y(t) \coloneqq Y(t) - Y(t-1)$, не имеют тех же базовых характеристических свойств, что и производные первого порядка [18, 19]. Например, стандартное правило Лейбница (правило дифференцирования произведения) нарушается для этих конечных разностей [18, 19].

Используя подход, предложенный в [20, 21, 22] и [23, с. 409-453], мы можем предложить дифференциальное уравнение для экономического акселератора, которое дает дискретные аналоги уравнений (2), (8) и (6), соответствующих принципу корректировки основного капитала. Дискретные уравнения (2), (8) и (6) могут быть получены из предлагаемых дифференциальных уравнений без использования каких-либо приближений и аппроксимаций.

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{dK(t)}{dt} = s \cdot Y(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - k\right), \qquad (9)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{v} \cdot I(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - k\right), \qquad (10)$$

где δ(z) – дельта-функция Дирака, являющаяся обобщенной функцией [24, 25]. Дельта-функция Дирака играет важную роль в современной экономической теории и финансах [26, 27]. В уравнениях (9) и (10) дельта-функции описывают периодические резкие всплески. Следует отметить, что обобщенные функции определяются в математике как непрерывные функционалы на пространстве основных функций функцией [24, 25]. Эти функционалы непрерывны в подходящей топологии на пространстве основных функций. Поэтому уравнения (9) и (10) следует понимать в обобщенном смысле, то есть на пространстве основных функций.

Для получения дискретных уравнений из уравнений (9) и (10), можно воспользоваться фундаментальной теоремой математического анализа и формулой Ньютона-Лейбница в виде

$$\int_0^t f^{(1)}(\tau) d\tau = f(t) - f(0), \qquad (11)$$

где $f^{(1)}(\tau) \coloneqq df(\tau)/d\tau$ – производная первого порядка по τ.

Интегрируя уравнение (9) от 0 до t, где nT<t<(n+1)T, получаем дискретное уравнение

$$K_{n+1} = K_0 + s \cdot T \cdot \sum_{k=1}^{n} Y_k, \qquad (12)$$

где $K(0) = K_0$, и использованы обозначения

$$Y_k := Y(k \cdot T - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} Y(k \cdot T - \varepsilon), \qquad (13)$$

$$K_{n+1} := K((n+1) \cdot T - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} K((n+1) \cdot T - \varepsilon). \qquad (14)$$

В уравнении (12) заменим n + 1 на n, и получим

$$K_n = K_0 + s \cdot T \cdot \sum_{k=1}^{n-1} Y_k. \qquad (15)$$

Вычитая (15) из уравнения (12), получаем $K_{n+1} - K_n = s \cdot T \cdot Y_n$, которое совпадает с уравнением (6).

В результате можно сделать вывод, что дискретные уравнения (6) и (8) можно получить из дифференциальных уравнений (9) и (10) соответственно, без использования каких-либо приближений и аппроксимаций.

В рамках подхода с непрерывным временем, дискретные экономические акселераторы с памятью соответствуют дифференциальным уравнениям, описывающим экономическую динамику с памятью и периодическими резкими всплесками, которые описываются дельта-функциями. Можно утверждать, что дискретный акселератор (6) фактически описывает экономическую динамику с периодическими резкими всплесками дохода или периодическими резкими всплесками склонности к сохранению s. Дискретный акселератор (8) фактически описывает экономическую динамику с периодическими резкими всплесками чистых инвестиций или всплесками производительности капитала 1/v.

5. **Акселератор со степенной памятью и непрерывным временем**

Для учета эффектов степенной памяти в концепции акселератора и в принципе корректировки основного капитала, можно использовать понятие производных нецелого порядка [28, 29, 30] и акселератора нецелого порядка [7]. Уравнения (1) и (7) можно обобщить с помощью акселератора с памятью [7], который описывает взаимосвязь между чистыми инвестициями I(t) (или доходом Y(t)) и предельной величиной нецелого порядка для дохода $(D^{\alpha}_{0+}Y)(t)$ (или основного капитала $(D^{\alpha}_{0+}K)(t)$, соответственно). Чтобы иметь правильные размерности экономических величин, мы будем использовать безразмерную временную переменную t. Обобщения стандартных уравнений акселератора (1) и (7), учитывающие эффекты динамической памяти [5, 6], можно записать [7] в виде

$$(D^{\alpha}_{0+}Y)(t) = \frac{1}{v} \cdot I(t), \qquad (16)$$

$$(D^{\alpha}_{0+}K)(t) = s \cdot Y(t), \qquad (17)$$

где D^{α}_{0+} – левосторонняя производная Капуто порядка α>0, которая определяется формулой

$$(D^{\alpha}_{0+}K)(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{K^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \qquad (18)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $K^{(n)}(\tau)$ – производная целого порядка n:=[α]+1 функции K(τ) по переменной τ: 0<τ<t. Для существования выражения (18), функция K(τ) должна иметь целые производные вплоть до (n-1)-го порядка, которые являются абсолютно непрерывными функциями на интервале [0, t]. Для целых α=n, производные Капуто совпадают со стандартными производными [29, с. 79], [30, с. 92-93], то есть $(D^{n}_{0+}K)(t) = K^{(n)}(t)$. Следует отметить, что уравнения (16) и (17) при α = 1 принимают вид уравнений (1) и (7), соответственно.

Уравнения акселератора (16) и (17) включают стандартные уравнения акселератора и мультипликатора в виде частных случаев [7]. Это утверждение можно доказать, рассматривая эти уравнения для α=0 и α=1. Используя свойство $(D^{1}_{0+}Y)(t) = Y^{(1)}(t)$ производной Капуто [29, с. 79], формула (16) при α=1 принимает вид уравнения (1), которое описывает стандартный акселератор. Используя $(D^{0}_{0+}Y)(t) = Y(t)$, уравнение (16) при α=0 записывается как уравнение I(t)=v·Y(t), которое является уравнением стандартного мультипликатора. В результате получаем, что понятие акселератора с памятью обобщает понятия стандартного мультипликатора и акселератора [7].

Рассмотрим дробные дифференциальные уравнения

$$(D^{\alpha}_{0+}Y)(t) = \frac{1}{v} \cdot I(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - k\right), \qquad (19)$$

$$(D^{\alpha}_{0+}K)(t) = s \cdot Y(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - k\right), \qquad (20)$$

которые следует понимать в обобщенном смысле, то есть на пространстве основных функций. В рамках подхода с непрерывным временем, уравнения (19) и (20) могут рассматриваться как уравнения акселераторов для экономических процессов с памятью и кризисными явлениями, описываемыми периодическими резкими всплесками.

Действие левостороннего дробного интеграла Римана-Лиувилля порядка α на уравнения (19) и (20) определяется на пространстве основных функций на полуоси, используя подход через сопряженный оператор [28, с. 126-130]. Левостороннее дробное интегрирование Римана-Лиувилля обеспечивает обратную операцию [30, с. 96-97] к левостороннему дробному дифференцированию Капуто, которое используется в уравнениях (19) и (20). Далее можно воспользоваться Леммой 2.22 из [30, с. 96-97], описывающей эквивалентность дробных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Вольтерра [30, с. 199-208]. Для дробных дифференциальных уравнений (19) и (20) эту эквивалентность следует рассматривать на пространстве основных функций [28, с. 154-157], так как эти уравнения содержат дельта-функции Дирака.

6. **Акселератор со степенной памятью и дискретным временем**

Получим уравнение дискретного акселератора с памятью, соответствующее дробному дифференциальному уравнению (20). Для этого воспользуемся теоремой 18.19 из [23, с. 444], которая изначально была предложена в [20, 21] и выполняется для любого положительного порядка α>0. Эта теорема основана на эквивалентности дробных дифференциальных уравнений и интегральных уравнениях Вольтерра в обобщенном смысле, то есть на пространстве основных функций. Используя теорему 18.19 из [23, с. 444], можно утверждать, что дифференциальное уравнение (20) с начальными условиями $K^{(k)}(0) = K^{(k)}_0$ (k=0, 1,… , N-1), где N-1<α<N, эквивалентна дискретному уравнению

$$K^{(m)}_{n+1} = \sum_{k=0}^{N-m-1} \frac{T^k}{k!} \cdot K^{(k+m)}_0 \cdot (n+1)^k + \frac{s \cdot T^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^{\alpha-1-m} \cdot Y_k, \qquad (21)$$

где $Y^{(m)}(t) = d^m Y(t)/dt^m$; $Y^{(m)}_k := \lim_{\varepsilon \to 0+} Y^{(m)}(k \cdot T - \varepsilon)$; и m=0, 1,…,N-1. Уравнение (21) является дискретным отображением с памятью. Уравнение (21) задает акселератор с памятью для макроэкономических моделей с дискретным временем.

Следует подчеркнуть, что дискретные уравнения (21) получаются из дробного дифференциального уравнения (20) без использования каких-либо приближений и аппроксимаций, то есть эти уравнения являются точным дискретными аналогами дробного дифференциального уравнения (20). Уравнения (21) определяют дискретное отображение со степенной памятью, параметр угасания которой равен α>0.

Для 0<α<1 (N=1) дискретное отображение (21) определяется уравнением

$$K_{n+1} = K_0 + \frac{s \cdot T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^{\alpha-1} \cdot Y_k. \qquad (22)$$

В уравнении (22) замена n + 1 на n дает

$$K_n = K_0 + \frac{s \cdot T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^{\alpha-1} \cdot Y_k. \qquad (23)$$

Вычитая уравнение (23) из уравнения (22), получаем

$$K_{n+1} - K_n = \frac{s \cdot T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot Y_n + \frac{s \cdot T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{n-1} V_{\alpha}(n-k) \cdot Y_k, \qquad (24)$$

где функция $V_{\alpha}(z)$ определяется формулой $V_{\alpha}(z) := (z+1)^{\alpha-1} - (z)^{\alpha-1}$. Уравнение (24) является обобщением уравнения (6) для случая степенной памяти при 0<α<1.

Аналогично дробное дифференциальное уравнение (19) дает дискретное уравнение

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{T^{\alpha}}{v \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot I_n + \frac{T^{\alpha}}{v \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} V_{\alpha}(n-k) \cdot I_k, \qquad (25)$$

которое является обобщением уравнения (8) для случая степенной памяти при 0<α<1.

Уравнения (24) и (25) описывают дискретные аналоги акселераторов со степенной памятью при 0<α<1. При α>1 дискретный акселератор с памятью описывается уравнениями (21). Для α=1 используя $V_1(z) = 0$, уравнения (24) и (25) приводят к дискретным отображениям, которые совпадают с уравнениями (6) и (8), соответственно.

7. Заключение

На основе приведенных доказательств можно сделать вывод о том, что дробные дифференциальные уравнения (19) и (20) в точности соответствуют дискретным уравнениям (24) и (25). В рамках подхода с непрерывным временем, дискретные экономические акселераторы с памятью соответствуют уравнениям, описывающим динамику экономики с памятью и периодическими резкими всплесками. Дискретные акселераторы (21), (24) фактически описывают экономические процессы с памятью и периодическими резкими всплесками дохода (или периодическими резкими всплесками склонности к сохранению s). Уравнение дискретного акселератор (25) фактически описывает экономические процессы с памятью и периодическими резкими всплесками чистых инвестиций (или периодическими резкими всплесками предельной производительности капитала, т.е. нормы акселерации, 1/v).

Подчеркнем, что нет точного соответствия между стандартными дискретными и непрерывными акселераторами, которые описываются уравнениями (1) и (2), (6) и (7), (1) и (8). Эти акселераторы связаны только асимптотически, то есть при $T \to 0$. В рамках подхода с непрерывным временем стандартные дискретные акселераторы (6) и (8) точно соответствуют дифференциальным уравнениям с периодическими резкими всплесками, которые описываются дельта-функциями. Поэтому стандартные дискретные акселераторы без памяти соответствуют непрерывным моделям экономических процессов с периодическими резкими всплесками. Предлагаемые дискретные акселераторы с памятью, которые определяются уравнениями (21), (24) и (25), описывают экономические процессы со степенной памятью и периодическими резкими всплесками. Предлагаемые дискретные акселераторы с памятью могут быть использованы для описания макроэкономических процессов со степенной памятью [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42] в моделях с дискретным временем.

Список литературы / References

1. *Аллен Р.* Математическая экономия. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 670 с.
2. *Волгина О.А., Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н., Шуман Г.И.* Математическое моделирование экономических процессов и систем. 3-е изд. М.: КРОНУС, 2014. 200 с.
3. *Allen R.G.D.* Macro-Economic Theory. A Mathematical Treatment. London: Macmillan, 1968. 420 p.
4. *Tarasov V.E., Tarasova V.V.* Long and short memory in economics: fractional-order difference and differentiation // IRA-International Journal of Management and Social Sciences, 2016. Vol. 5. № 2. P. 327-334. DOI: 10.21013/jmss.v5.n2.p10.
5. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Concept of dynamic memory in economics // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018. Vol. 55. P. 127-145. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.06.032.
6. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Понятие динамической памяти в экономической теории // Экономика и предпринимательство, 2017. № 6 (83). С. 868-880.
7. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Обобщение понятий акселератора и мультипликатора для учета эффектов памяти в макроэкономике // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-3 (75-3). С. 1121-1129.

8. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Предельная полезность для экономических процессов с памятью // Альманах современной науки и образования, 2016. № 7 (109). С. 108–113.
9. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Экономический показатель, обобщающий среднюю и предельную величины // Экономика и предпринимательство, 2016. № 11-1 (76-1). С. 817-823.
10. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Предельные величины нецелого порядка в экономическом анализе // Азимут Научных Исследований: Экономика и Управление, 2016. № 3 (16). С. 197-201.
11. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Economic interpretation of fractional derivatives // Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2017. Vol. 3. № 1. P. 1-7. DOI: 10.18576/pfda/030101.
12. *Tarasova V.V., Tarasov V.E*. Elasticity for economic processes with memory: fractional differential calculus approach // Fractional Differential Calculus, 2016. Vol. 6. № 2. P. 219-232. DOI: 10.7153/fdc-06-14.
13. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Ценовая эластичность спроса с памятью // Экономика, социология и право, 2016. № 4–1. С. 98–106.
14. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е*. Нелокальные меры неприятия риска в экономическом процессе // Экономика: Теория и Практика, 2016. № 4 (44). С. 54-58.
15. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Неприятия риска для инвесторов с памятью: эредитарные обобщения меры Эрроу-Пратта // Финансовый журнал, 2017. № 2 (36). С. 46-63.
16. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е*. Детерминированный факторный анализ: методы интегро-дифференцирования нецелого порядка // Актуальные проблемы экономики и права, 2016. Т. 10. № 4. С. 77-87. DOI: 10.21202/1993-047X.10.2016.4.77-87.
17. *Matthews R.C.O.* The Trade Cycle. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.
18. *Tarasov V.E*. Exact discrete analogs of derivatives of integer orders: Differences as infinite series // Journal of Mathematics, 2015. Vol. 2015. Article ID 134842. 8 p. DOI: 10.1155/2015/134842.
19. *Tarasov V.E.* Exact discretization by Fourier transforms // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Vol. 37. P. 31-61. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.01.006
20. *Tarasov V.E*. Differential equations with fractional derivative and universal map with memory // Journal of Physics A., 2009. Vol. 42. № 46. Article ID 465102. DOI: 10.1088/1751-8113/42/46/465102.
21. *Tarasov V.E.* Discrete map with memory from fractional differential equation of arbitrary positive order // Journal of Mathematical Physics, 2009. Vol. 50. № 12. Article ID 122703. DOI: 10.1063/1.3272791.
22. *Tarasova V.V., Tarasov V.E*. Logistic map with memory from economic model // Chaos, Solitons and Fractals, 2017. Vol. 95. P. 84-91. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.12.012.
23. *Tarasov V.E.* Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York: Springer, 2010. 505 p. DOI: 10.1007/978-3-642-14003-7.
24. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
25. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е*. Обобщенные функции и действия над ними. Том I. М.: Добросвет, 2000. 412 с..
26. *Russell T.* Continuous time portfolio theory and the Schwartz-Sobolev theory of distributions // Operations Research Letters, 1988. Vol. 7. № 3. P. 159-162.
27. *Sato R., Ramachandran R.V*. (Eds.) Conservation Laws and Symmetry: Applications to Economics and Finance. New York: Springer, 1990. 304 p.
28. *Самко С.Г., Килбас А.А., Марычев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и Техника, 1987. 688 с.
29. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1998. 340 p.
30. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
31. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е*. Макроэкономические модели с динамической памятью // Экономика и предпринимательство, 2017. № 3-2 (80-2). С. 26-35.
32. Tarasova V.V., Tarasov V.E. Fractional dynamics of natural growth and memory effect in economics // European Research, 2016. № 12 (23). P. 30-37. DOI: 10.20861/2410-2873-2016-23-004.
33. *Тарасова В.В.,* Тарасов В.Е. Эредитарное обобщение модели Харрода-Домара и эффекты памяти // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-2 (75-2). С. 72-78.
34. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е*. Эффекты памяти в эредитарной модели Харрода-Домара // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 32 (74). С. 38-44. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-74-002.
35. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е*. Кейнсианская модель экономического роста с памятью // Экономика и управление: проблемы, решения, 2016. № 10-2 (58). С. 21-29.
36. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е*. Эффекты памяти в эредитарной модели Кейнса // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 38 (80). С. 56-61. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-80-001.
37. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Влияние эффектов памяти на мировую экономику и бизнес // Азимут Научных Исследований: Экономика и Управление, 2016. Том 5. № 4 (17). С. 369-372.
38. *Tarasova V.V., Tarasov V.E*. Economic growth model with constant pace and dynamic memory // Проблемы современной науки и образования, 2017. № 2 (84). P. 40-45. DOI: 10.20861/2304-2338-2017-84-001.

39. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е*. Динамические межотраслевые модели с памятью, обобщающие модель Леонтьева // Экономика и предпринимательство, 2017. № 2-1 (79-1). С. 913-924.
40. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Dynamic intersectoral models with power-law memory // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018. Vol. 54. P. 100-117. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.05.015.
41. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Хронологическая экспонента для процессов с памятью и динамические межотраслевые модели экономики // Наука и образование сегодня, 2017. № 4 (15). С. 29-39.
42. *Tarasov V.E., Tarasova V.V.* Time-dependent fractional dynamics with memory in quantum and economic physics // Annals of Physics, 2017. Vol. 383. P. 579-599. DOI: 10.1016/j.aop.2017.05.017.