EVALUATING IMPACT OF TECHNOLOGICAL CHANGES IN MARKET WITH PRODUCERS AND HETEROGENEOUS CONSUMERS

Klimchuk M.Yu. (Russian Federation) Email: Klimchuk235@scientifictext.ru

Klimchuk Maria Yurievna — Bachelor,
SPECIALTY: APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE,
DEPARTMENT OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS,
LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,
MOSCOW

Abstract: *the article deals with issues related to the social welfare and GDP of the economic system when introducing new technology to the labor market. An attempt is made to evaluate the effect of computerization of low-tech labor. First model is constructed without the use of technology and the problem of competitive equilibrium is solved for it. Next, a second model is built using computerization of workers who produce low-tech labor. Additionally, in this model a production tax is added to pay for the unemployed. Analytic comparison of both models based on GDP and public welfare gives mixed results.*
Keywords: *competitive balance, computerization of labor, high-tech labor, low-tech labor, GDP, public welfare.*

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ ДЛЯ РЫНКА С ПРОИЗВОДИТЕЛЕМ И РАЗНОРОДНЫМИ ПОТРЕБИТЕЛЯМИ

Климчук М.Ю. (Российская Федерация)

Климчук Мария Юрьевна — бакалавр,
специальность: прикладная математика и кибернетика,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Аннотация: *в статье рассматриваются вопросы, связанные с общественным благосостоянием и ВВП экономической системы при внедрении новой технологии на рынок труда. В работе делается попытка оценить эффект от компьютеризации низкотехнологичного труда. Строится модель без использования технологий и для нее решается задача конкурентного равновесия. Далее приводится вторая модель с использованием компьютеризации работников, которые производят низкотехнологичный труд. Также в этой модели добавляется налог на производство для выплат безработным. Аналитическое сравнение обеих моделей по ВВП и общественному благосостоянию дают неоднозначные результаты.*
Ключевые слова: *конкурентное равновесие, компьютеризация труда, высокотехнологичный труд, низкотехнологичный труд, ВВП, общественное благосостояние.*

1. Введение

Математическая экономика — это сфера теоретической и прикладной научной деятельности, целью которой является математическое описание экономических объектов, процессов и феноменов.

В настоящее время компьютерные технологии стремительно развиваются и проникают во все научные области, в том числе в экономику. Они открывают для людей больше возможностей, упрощают решение сложных задач. Поэтому имеет смысл оценить влияние технологических изменений на общее состояние экономического рынка, чтобы установить, могут они быть полезными или нет. Но помимо положительного влияния технологий на жизнь людей, может оказаться и отрицательный результат их внедрения.

В этой работе была создана модель игры между агентами экономической системы: имеется несколько потребителей и один производитель, которые взаимодействуют между собой следующим образом: производитель оплачивает труд работников - потребителей - за производство продукции и продает товары потребителям, а потребители, в свою очередь, на заработанные деньги приобретают желаемые товары. В данной модели присутствует два типа потребителей: производящие высокотехнологичный труд и низкотехнологичный труд, от вида производимого труда зависит их заработная плата. У производителя объемы работ, выполняемых потребителями, в зависимости от вида труда будут различными. Был проведен анализ влияния технологических изменений на общественное благосостояние и внутренний валовый продукт (ВВП) и получены неоднозначные результаты, которые зависят от различных факторов.

Работа разбита на несколько глав. В первой формулируется постановка задачи для первой модели и способы ее решения. Во второй главе вводятся все необходимые элементы игры и приводятся поиск конкурентного равновесия. В третьей главе формулируется постановка задачи для второй модели и способы ее решения. В четвертой главе вводятся все необходимые элементы игры и приводятся поиск конкурентного равновесия. В пятой главе производится анализ влияния компьютеризации низкотехнологичного труда на экономический рынок.

2. Постановка задачи

Целью данной работы является оценка влияния технологических изменений на общественное благосостояние и внутренний валовый продукт (ВВП). Рассматриваемая задача основывается на модели Эрроу-Дебре [1, 2].

Задача может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим экономическую систему, в которой действует 1 производитель и m потребителей. Есть два типа потребителей: один, который производит высокотехнологичный труд, а второй — низкотехнологичный. Считаем, что в системе производится 1 товар. Издержки на производство этих товаров линейны. Производитель выпускает товары, используя и оплачивая труд потребителей, а вторые, в свою очередь, покупают эти товары на вырученные деньги от работы на производителя. Стратегией производителя и потребителя является максимизация своей функции полезности. Функция полезности потребителя зависит от количества закупаемых товаров и от объема труда, произведенного потребителем. Считаем, что потребитель не насыщаем, т.е. при увеличении количества закупаемых товаров рост функции полезности не ограничен. Функция полезности производителя зависит от выручки от продажи товара и от затрат на производство товара - заработная плата работникам.

3. Модель игры с разнотипными потребителями

Рассматривается игра m+1: один производитель и m потребителей.

Вводятся следующие обозначения:

- c^H - количество высокотехнологичного труда, необходимое для производства единицы товара;
- c^L - количество низкотехнологичного труда, необходимое для производства единицы товара;
- $p_0^H > 0$ - заработная плата работника, который производит высокотехнологичный труд (за единицу труда);
- $p_0^L > 0$ - заработная плата работника, который производит низкотехнологичный труд (за единицу труда);

Предполагаем, что $p_0^H > p_0^L$

- $p_1 > 0$ - рыночная стоимость производимого товара;
- p=(p_0^H, p_0^L, p_1) - вектор цен;
- y - объем продукции, выпускаемой производителем;
- x_j^H, j = 1,.., m_H - объем продукции, закупаемой j-ым потребителем, который производит высокотехнологичный труд;
- x^H =(x_1^H , x_2^H , .., $x_{m_H}^H$)–вектор объемов продукции, закупаемый потребителями с высокотехнологичным трудом;
- x_j^L, j = 1,.., m_L объем продукции, закупаемой j-ым потребителем, который производит низкотехнологичный товар;
- x^L =(x_1^L , x_2^L , .., $x_{m_L}^L$) – вектор объемов продукции, закупаемый потребителями с низкотехнологичным трудом;
- s^H - объем высокотехнологичного труда, использованного производителем;
- s^L - объем низкотехнологичного труда, использованного производителем;
- l_j^H , j = 1,..,m_H– объем высокотехнологичного труда, произведенного j-м потребителем;
- l_j^L , j = 1,..,m_L– объемнизкотехнологичного труда, произведенного j-м потребителем;

Объем труда удовлетворяет следующим соотношениям:

$$s^H = c^H y,\ s^L = c^L y \qquad (1)$$

$$s^H = \sum_{j=1}^{m_H} l_j^H,\ s^L = \sum_{j=1}^{m_L} l_j^L \qquad (2)$$

- V(p_0^H, p_0^L, p_1, y) - функция полезности производителя;
- U_j^H (l_j^H , x_j^H), j = 1,.., m_H - функция полезности j-го потребителя, который производит высокотехнологичный труд;
- U_j^L (l_j^L , x_j^L), j = 1,.., m_L - функция полезности j-го потребителя, который производит низкотехнологичный труд;
- W = $\sum_{j=1}^{m_H} U_j^H (l_j^H, x_j^H) + \sum_{j=1}^{m_L} U_j^L (l_j^L, x_j^L)$+ V($p_0^H$, p_0^L, p_1, y) - общественное благосостояние;
- G = $p_1 \sum_{j=1}^{m_H} x_j^H + p_1 \sum_{j=1}^{m_L} x_j^L$ –ВВП (внутренний валовый продукт).

Производитель стремится максимизировать свою функцию полезности, которая равна доходу от продажи продукции минус издержки на оплату потребляемого в производстве труда:

V(p_0^H, p_0^L, p_1, y) = p_1y - $p_0^H s^H$ - $p_0^L s^L$

Из выражений (1) получаем, что функция полезности будет зависеть только от объема продукции, выпускаемой производителем, и иметь следующий вид:

V(p_0^H, p_0^L, p_1, y) = (p_1 - $p_0^H c^H$ - $p_0^L c^L$)y

Потребитель в свою очередь стремится максимизировать свою функцию полезности, которая рассчитывается как полезность от потребления закупаемой продукции минус труд, потраченный на производство продукции:

$U_j^H(l_j^H, x_j^H) = U_j^H(x_j^H) - l_j^H$, где

$$U_j^H(x_j^H) = \begin{cases} K_1 x_j^H & , x_j^H < \overline{x_j^H} \\ K_1 x_j^H + K_2\left(x_j^H - \overline{x_j^H}\right), & x_j^H \geq \overline{x_j^H} \end{cases}$$

Где $K_1 > K_2 > 0$ - некоторые константы, и при выполнении этого соотношения функция полезности будет вогнута по x.

Аналогичные соотношения выполнены и для функции полезности потребителя, производящего низкотехнологичный товар.

Будем предполагать, что потребитель все заработанные деньги тратит на покупку товара:

$$l_j^H p_0^H = p_1 x_j^H,\ j = 1,.., m_H,\ l_j^H p_0^L = p_1 x_j^L,\ j = 1,.., m_L \qquad (3)$$

В результате функции полезности потребителей выглядят следующим образом:

$$U_j^H(l_j^H(p_0^H, p_1), x_j^H) = U_j^H(p_0^H, p_1, x_j^H) = U_j^H(x_j^H) - \frac{p_1}{p_0^H} x_j^H$$

$$U_j^L(l_j^L(p_0^L, p_1), x_j^L) = U_j^L(p_0^L, p_1, x_j^L) = U_j^L(x_j^L) - \frac{p_1}{p_0^L} x_j^L$$

4. Поиск конкурентного равновесия

Будем предполагать:

- в результате действия участников экономической системы на рынке установятся единые цены;
- каждый участник рассматривает цены на товары и услуги как фиксированные и действует наилучшим для себя образом в рамках действующих цен, исключая сговор.

Определение. Состоянием конкурентного равновесия называется тройка векторов (p^*, x^*, y^*), для которой выполнены следующие соотношения [3]:

$$\begin{cases} x_j^{H*} = \operatorname{argmax}_{x_j^H} U_j^H(p_0^{H*}, p_1^*, x_j^H),\ j = 1,.., m_H \\ x_j^{L*} = \operatorname{argmax}_{x_j^L} U_j^L(p_0^{L*}, p_1^*, x_j^L),\ j = 1,.., m_L \\ y^* = \operatorname{argmax}_y V(p_0^{H*}, p_0^{L*}, p_1^*, y) \end{cases} \qquad (4)$$

$$y^* = \sum_{j=1}^{m_H} x_j^H + \sum_{j=1}^{m_L} x_j^L \qquad (5)$$

Равенства (4) означают, что выполнено условие индивидуальной оптимальности для каждого из участников экономической системы.

Равенство (5) означает, что выполнено условие экономического баланса между спросом и предложением, т.е. весь трудовой ресурс и весь производимый товар используются.

В данной модели объем продукции, выпускаемой производителем, ограничен величиной $M_y \geq$ y.

Утверждение 1. Максимум функции прибыли производителя V(p_0^H, p_0^L, p_1, y) достигается при:

$$y^* = \begin{cases} M_y, & p_1 > p_0^H c^H + p_0^L c^L \\ [0;\ M_y], & p_1 = p_0^H c^H + p_0^L c^L \\ 0, & p_1 < p_0^H c^H + p_0^L c^L \end{cases}$$

Доказательство:

Если $p_1 > p_0^H c^H + p_0^L c^L$, то функция прибыли производителя V(p_0^H, p_0^L, p_1, y) является возрастающей по y, следовательно, максимум достигается при максимально возможном значении y, т.е. при y^* = M_y.

Если $p_1 = p_0^H c^H + p_0^L c^L$, то V($p_0^H$, p_0^L, p_1, y)= 0, и максимум достигается при любом y из интервала [0; M_y].

Если $p_1 < p_0^H c^H + p_0^L c^L$, то функция прибыли производителя V(p_0^H, p_0^L, p_1, y) является убывающей по y, следовательно, максимум достигается при минимальном значении y, т.е. при y^*=0, и утверждение доказано.

В данной модели объем продукции, потребляемой каждым производителем, ограничен величиной M_x, $x_j^H \leq M_x$, $j = 1,.., m_H$, $x_j^L \leq M_x$, $j = 1,.., m_L$.

Утверждение 2. Максимум функции полезности j-го потребителя, производящего высокотехнологичный труд, $U_j^H(l_j^H(p_0^H, p_1), x_j^H)$ достигается при:

$$x_j^{H*} = \begin{cases} M_x, & \frac{p_1}{p_0^H} < K_2 < K_1 \\ \overline{x_j^H}, & K_2 < \frac{p_1}{p_0^H} < K_1 \\ 0, & K_2 < K_1 < \frac{p_1}{p_0^H} \end{cases}$$

Доказательство:

Если $\frac{p_1}{p_0^H} < K_2 < K_1$, то функция потребителя с высшим образованием $U_j^H(l_j^H(p_0^H, p_1), x_j^H)$ является возрастающей по x, следовательно, максимум достигается при максимально возможном значении x, т.е. $x_j^{H*} = M_x$.

Если $K_2 < \frac{p_1}{p_0^H} < K_1$, то $U_j^H(l_j^H(p_0^H, p_1), x_j^H)$ является возрастающей по x при $x_j^H < \overline{x_j^H}$ и убывающей при $x_j^H \geq \overline{x_j^H}$, следовательно, максимум достигается при $x_j^{H*} = \overline{x_j^H}$.

Если $K_2 < K_1 < \frac{p_1}{p_0^H}$, то функция потребителя с высшим образованием $U_j^H(l_j^H(p_0^H, p_1), x_j^H)$ является убывающей по x, следовательно, максимум достигается при минимальном значении x, т.е. $x_j^{H*} = 0$, и утверждение доказано.

Утверждение 3. Максимум функции полезности j-ого потребителя, производящего низкотехнологичный труд, $U_j^L(l_j^L(p_0^L, p_1), x_j^L)$ достигается при:

$$x_j^{L*} = \begin{cases} M_x, & \frac{p_1}{p_0^L} < K_2 < K_1 \\ \overline{x_j^L}, & K_2 < \frac{p_1}{p_0^L} < K_1 \\ 0, & K_2 < K_1 < \frac{p_1}{p_0^L} \end{cases}$$

Доказательство:

Доказывается по аналогии с предыдущим утверждением.

Утверждение 4. Для $p^* = (p_0^{H*}, p_0^{L*}, p_1^*)$ - вектора равновесных цен - выполнено следующее соотношение:

$$\frac{p_1^*}{p_0^{L*}} < c^H + c^L < \frac{p_1^*}{p_0^{H*}}$$

Доказательство:

Из (1), (2), (3) и (5) получаем следующее равенство:

$$\left(\frac{p_1^*}{p_0^{H*}} - c^H - c^L\right)\sum_{j=1}^{m_H} x_j^H + \left(\frac{p_1^*}{p_0^{L*}} - c^H - c^L\right)\sum_{j=1}^{m_L} x_j^L = 0$$

Т.к. по условию $p_0^H > p_0^L$, то утверждение доказано.

Из утверждений 1, 2, 3 и 4 следует, что в рамках индивидуально оптимальных стратегий производителя и потребителей баланс спроса и предложения описанной экономической системы может достигаться только при выполнении соотношения:

$$K_2 < \frac{p_1^*}{p_0^{H*}} < \frac{p_1^*}{\alpha p_0^{H*} + \beta p_0^{L*}} < \frac{p_1^*}{p_0^{L*}} < K_1, \qquad (6)$$

где $\alpha c = c^H$, $\beta c = c^L$.

Таким образом, любая тройка векторов (p^*, x^*, y^*) является состоянием конкурентного равновесия тогда и только тогда, когда:

- $p^* = (p_0^{H*}, p_0^{L*}, p_1^*)$ - вектор равновесных цен, удовлетворяющих (6).
- $x^{H*} = (x_1^{H*}, x_2^{H*}, .., x_{m_H}^{H*})$, $x^{L*} = (x_1^{L*}, x_2^{L*}, .., x_{m_L}^{L*})$ – вектора объемов труда, для которых выполнено (5).

С учетом (6) получаем следующие соотношения для общественного благосостояния и ВВП:

$$W = \sum_{j=1}^{m_H} U_j^H(p_0^{H*}, p_1^*, \overline{x_j}^H) + \sum_{j=1}^{m_L} U_j^L(p_0^{L*}, p_1^*, \overline{x_j}^L) + V(p^*, y^*) =$$

$$\sum_{j=1}^{m_H}\left(U_j^H(\overline{x_j}^H) - \frac{p_1^*\overline{x_j}^H}{p_0^{H*}}\right) + \sum_{j=1}^{m_L}\left(U_j^L(\overline{x_j}^L) - \frac{p_1^*\overline{x_j}^L}{p_0^{L*}}\right) + 0 =$$

$$\sum_{j=1}^{m_H}\left(K_1\overline{x_j}^H - \frac{p_1^*\overline{x_j}^H}{p_0^{H*}}\right) + \sum_{j=1}^{m_L}\left(K_1\overline{x_j}^L - \frac{p_1^*\overline{x_j}^L}{p_0^{L*}}\right) =$$

$$\left(K_1 - \frac{p_1^*}{p_0^{H*}}\right)\sum_{j=1}^{m_H}\overline{x_j}^H + \left(K_1 - \frac{p_1^*}{p_0^{L*}}\right)\sum_{j=1}^{m_H}\overline{x_j}^L$$

$$G = p_1^*\sum_{j=1}^{m_H}\overline{x_j}^H + p_1^*\sum_{j=1}^{m_L}\overline{x_j}^L = (p_0^{H*}c^H + p_0^{L*}c^L)\left(\sum_{j=1}^{m_H}\overline{x_j}^H + \sum_{j=1}^{m_L}\overline{x_j}^L\right)$$

5. Модель игры с компьютеризацией труда и базовыми выплатами

Теперь рассмотрим модель игры, в которой низкотехнологичный труд работников компьютеризирован. Производитель использует машины вместо людей, а люди без высшего образования остались безработными. При этом производство облагается обязательным налогом, с которого производятся базовые выплаты людям, оставшимся без работы.

По-прежнему рассматривается игра m+1: один производитель и m потребителей. Все обозначения остаются прежними, только добавляется следующее:

- $p = \left(p_0^{Hp}, p_0^{Lp} = 0, p_1^p\right)$ — вектор цен;
- y^p — объем продукции, выпускаемой производителем;
- $\tau > 0$— налог на производство для содержания безработных членов общества, причем $\tau < p_0^L c^L$
- D — затраты производителя на внедрение компьютеризации (новой технологии).
- $V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, \tau, y^p, D, t)$ — функция полезности производителя;
- $W^p = \sum_{j=1}^{m_H} U_j^{Hp}(l_j^H, x_j^H) + \sum_{j=1}^{m_L} U_j^{Lp}(x_j^L) + V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, \tau, y^p, D, t)$ – общественное благосостояние;
- $G^p = p_1^p \sum_{j=1}^{m_H} x_j^H + p_1^p \sum_{j=1}^{m_L} x_j^L$ – ВВП;

В данной модели некоторые параметры обнуляются:

- $p_0^{Lp} = 0$ — заработная плата рабочего, производящего низкотехнологичный труд;
- $s^L = 0$ — объем высокотехнологичного труда, использованного производителем;
- $l_j^L = 0, j = \overline{1, m_L}$ — объем труда, произведенного j-ым потребителем, который производит низкотехнологичный труд;

Функция полезности производителя в начальный момент времени t = 0 выглядит следующим образом, т.к. затраты на компьютеризацию у нас единовременные:

$$V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, \tau, y^p, D, 0) = p_1^p y^p - p_0^{Hp} s^H - \tau y^p - D$$

Функция полезности производителя в последующее время выглядит следующим образом:

$$V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, y^p, 0, t) = p_1^p(t) y^p - p_0^{Hp}(t) s^H - \tau y^p$$

Т.к. $s^H = c^H y^p$, то мы получаем:

$$V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, \tau, y^p, D, 0) = p_1^p y^p - p_0^{Hp} c^H y^p - \tau y^p - D = (p_1^p - p_0^{Hp} c^H - \tau) y^p - D,$$

$$V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, \tau, y^p, 0, t) = p_1^p(t) y^p - p_0^{Hp}(t) c^H y^p - \tau y^p = (p_1^p(t) - p_0^{Hp}(t) c^H - \tau) y^p$$

Функция потребителя с высокотехнологичным трудом остается без изменений:

$$U_j^{Hp}(l_j^H(p_0^H, p_1), x_j^H) = U_j^{Hp}(p_1 x_j^H / p_0^H, x_j^H) = U^H(x_j^H) - p_1 x_j^H / p_0^H$$

Потребитель, который производил низкотехнологичный труд, приобретает товары на базовые выплаты (минимальный прожиточный минимум):

$$(\tau y^p)/m_L = p_1^p x_j^L, j = \overline{1, m_L}$$

Тогда:

$x_j^L(\tau, y^p, p_1^p) = \tau y^p / m_L p_1^p$.

В результате функция полезности потребителя без высшего образования выглядит следующим образом:

$$U_j^{Lp}(x_j^L) = U_j^{Lp}(x_j^L(\tau, y^p, p_1^p)) = \tau y^p / m_L p_1^p$$

Общественное благосостояние и ВВП выглядят следующим образом:

$$W^p = \sum_{j=1}^{m_H} U_j^{Hp}(l_j^H, x_j^H) + \tau y^p / p_1^p + V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, y^p, D, t)$$

$$G^p = p_1^p \sum_{j=1}^{m_H} x_j^H + \tau y^p$$

6. Поиск конкурентного равновесия для II модели

Определение. Состоянием конкурентного равновесия называется тройка векторов (p^{p*}, x^{p*}, y^{p*}), для которой выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_j^{H*} = \arg \max_{x_j^H}(U_j^{Hp}(p_0^{Hp*}, p_1^{p*}, x_j^H)), j = \overline{1, m_H} \\ x_j^{Lp*} = \frac{\tau y^{p*}}{m_L p_1^{p*}}, \qquad j = \overline{1, m_L} \\ y^{p*} = \arg \max_{y^p}(V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, y^p, D, t)) \end{cases} \qquad (7)$$

$$y^{p*} = \frac{p_1^{p*}}{p_1^{*p} - \tau} \sum_{j=1}^{m_H} x_j^{H*} \qquad (8)$$

Равенства (7) означают, что выполнено условие индивидуальной оптимальности для каждого из участников экономической системы.

Равенство (8) означает, что выполнено условие экономического баланса между спросом и предложением, т.е. весь трудовой ресурс и весь производимый товар используются.

В данной модели объем продукции, выпускаемой производителем, ограничен величиной $M_y^p, y \leq M_y^p < M_y$.

Утверждение 1. Максимум функции прибыли производителя $V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, y^p, 0, t)$ достигается при:

$$y^* = \begin{cases} M_y^p & , p_1^p > p_0^{Hp} c^H + \tau \\ [0; M_y^p] & , p_1^p = p_0^{Hp} c^H + \tau \\ 0 & , p_1^p < p_0^{Hp} c^H + \tau \end{cases}$$

Доказательство:

Если $p_1^p > p_0^{Hp} c^H + \tau$, то функция прибыли производителя $V^p(p_0^{Hp}, p_1^p, y^p, 0, t)$является возрастающей по y, следовательно, максимум достигается при максимально возможном значении y, т.е. при $y^{p*} = M_y^p$.

Если $p_1^p = p_0^{Hp} c^H + \tau$, то $V^p\left(p_0^{Hp}, p_1^p, y^p, 0, t\right) = 0$, и максимум достигается при любом y из интервала $[0; M_y^p]$.

Если $p_1^p < p_0^{Hp} c^H + \tau$, то функция прибыли производителя $V^p\left(p_0^{Hp}, p_1^p, y^p, 0, t\right)$ является убывающей по y, следовательно, максимум достигается при минимальном значении y, т.е. при $y^{p*} = 0$ и утверждение доказано.

В данной модели объем продукции, потребляемой каждым производителем, ограничен величиной$M_x^p < M_x, x_j^H \leq M_x^p, \forall j = \overline{1, m_H}, \frac{\tau y^p}{p_1^p m_L} \leq M_x^p, \forall j = \overline{1, m_L}$, где M_x^pудовлетворяет соотношению:

$$M_y^p \geq M_x^p > \frac{p_1^p}{p_1^p - \tau} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x}_j^H \qquad (9)$$

Утверждение 2. Максимум функции полезности j-го потребителя с высшим образованием $U_j^H(p_0^{Hp}, p_1^p, x_j^H)$ достигается при:

$$x_j^{H*} = \begin{cases} 0 & , K_2 < K_1 < \dfrac{p_1}{p_0^H} \\ \overline{x_j}^H & , K_2 < \dfrac{p_1}{p_0^H} < K_1 \\ M_x & , \dfrac{p_1}{p_0^H} < K_2 < K_1 \end{cases}$$

Доказательство:

Доказывается аналогично Утверждению 2 из п. 4.

Утверждение 3. для $p^* = (p_0^{Hp*}, p_0^{Lp*} = 0, p_1^{*p})$ - вектора равновесных цен - выполнено следующее соотношение:

$$p_1^{*p} = p_0^{Hp*} c^H + \tau$$

Доказательство:

Из определения конкурентного равновесия и из предположения, что потребитель все заработанные деньги тратит на покупку товара, получается следующее:

$$\left(\frac{p_1^{p*}}{p_0^{Hp*}} - \frac{p_1^{p*} c^H}{p_1^{p*} - \tau}\right) \sum_{j=1}^{m_H} x_j^{H*} = 0$$

Т.к. по условию $\sum_{j=1}^{m_H} x_j^{H*} > 0$, то утверждение доказано.

Из утверждений 1, 2 и 3 следует, что в рамках индивидуально оптимальных стратегий производителя и потребителей баланс спроса и предложения описанной экономической системы может достигаться при выполнении соотношения:

$$K_2 < \frac{p_1^{p*} - \tau}{p_0^{Hp*}} = c^H < \frac{p_1^{p*}}{p_0^{Hp*}} < K_1 \qquad (10)$$

Таким образом, любая тройка векторов (p^{p*}, x^{p*}, y^{p*})является состоянием конкурентного равновесия тогда и только тогда, когда:

- $p^{p*} = (p_0^{Hp*}, p_0^{Lp*} = 0, p_1^{*p})$ - вектор равновесных цен, удовлетворяющих (9).
- x^{H*}=(x_1^{H*}, x_2^{H*}, .., $x_{m_H}^{H*}$), x^{L*}=(x_1^{L*}, x_2^{L*}, .., $x_{m_L}^{L*}$) – вектора объемов закупаемой продукции, для которых выполнено (8).

7. Оценка влияния компьютеризации низкотехнологичного труда на рынок

Как видно из предыдущих утверждений компьютеризация низкотехнологичного труда нарушает в системе баланс спроса и предложения и запускает процесс «нащупывания» новых равновесных цен. Избыточный спрос на труд и товары задается разностью между суммарным спросом и $D_0(p), D_1(p)$ и суммарным предложением $S_0(p), S_1(p)$.

Функция избыточного спроса на труд выглядит следующим образом:

$$E_0(p) = D_0(p) - S_0(p) = s^* - \sum_{j=1}^{m_H} l_j^{H*} =$$

$$c^H y^{*p} - \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x}_j^H = \begin{cases} -\frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} m_H M_x^p & , \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} < K_2 < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} < c^H \\ -\frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x}_j^H & , K_2 < \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} < c^H \\ 0 & , K_2 < K_1 < \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}}, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} < c^H \\ c^H M_y^p - \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} m_H M_x^p & , \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} < K_2 < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} > c^H \\ c^H M_y^p - \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} \overline{x}_j^H & , K_2 < \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} > c^H \\ c^H M_y^p & , K_2 < K_1 < \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}}, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} > c^H \end{cases}$$

Функция избыточного спроса на товар:

$$E_1(p) = D_1(p) - S_1(p) = \sum_{j=1}^{m_H} x_j^{H*} - y^{*p} = \begin{cases} m_H M_x^p & , \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} < K_2 < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} < c^H \\ \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j^H} & , K_2 < \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} < c^H \\ 0 & , K_2 < K_1 < \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}}, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} < c^H \\ m_H M_x^p - \frac{p_1^p - \tau}{p_1^p} M_y^p & , \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} < K_2 < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} > c^H \\ \overline{x}_j^H - \frac{p_1^p - \tau}{p_1^p} M_y^p & , K_2 < \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}} < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} > c^H \\ -\frac{p_1^p - \tau}{p_1^p} M_y^p & , K_2 < K_1 < \frac{p_1^p}{p_0^{Hp}}, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^{Hp}} > c^H \end{cases}$$

Изменения цен будут описываться системой дифференциальных уравнений $\frac{dp_k}{dt} = \gamma_k E_k(p)$, где $E_k(p)$ — функция избыточного спроса на труд или товар соответственно, γ_k— коэффициент подстройки цены, характеризующий уровень волатильности цены товара или труда. Считаем, что до момента компьютеризации низкотехнологичного труда система находилась в состоянии конкурентного равновесия, т.е. $p(0) = p^*$. Тогда задача моделирования цен сводится к решению задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = \gamma_k E_k(p) \\ p(0) = p^* \end{cases} \qquad (11)$$

Рассмотрим отдельно случай $p_1^p = p_0^{Hp} c^H + \tau$. Из утверждения 3 это соотношение цен является конкурентным равновесием, поэтому будем считать, что $E_0(p) = E_1(p) = 0$, при условии $p_1^p = p_0^{Hp} c^H + \tau$.

Функции $E_0(p),\ E_1(p)$ определены кусочно на 4 областях плоскости $p_0^H\ p_1^c$:

$$I = \left(p_0^H, p_1^p\right): p_0^H > 0, p_1^p > 0, \frac{p_1^p}{p_0^H} < K_2, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^H} < c^H$$

$$II = ((p_0^H, p_1^p): p_0^H > 0, p_1^p > 0, K_2 < \frac{p_1^p}{p_0^H} < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^H} < c^H$$

$$III = \left(p_0^H, p_1^p\right): p_0^H > 0, p_1^p > 0, K_1 < \frac{p_1^p}{p_0^H}, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^H} < c^H$$

$$IV = ((p_0^H, p_1^p): p_0^H > 0, p_1^p > 0, \frac{p_1^p}{p_0^H} < K_2, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^H} > c^H$$

$$V = ((p_0^H, p_1^p): p_0^H > 0, p_1^p > 0, K_2 < \frac{p_1^p}{p_0^H} < K_1, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^H} > c^H$$

$$VI = ((p_0^H, p_1^p): p_0^H > 0, p_1^p > 0, K_1 < \frac{p_1^p}{p_0^H}, \frac{p_1^p - \tau}{p_0^H} > c^H$$

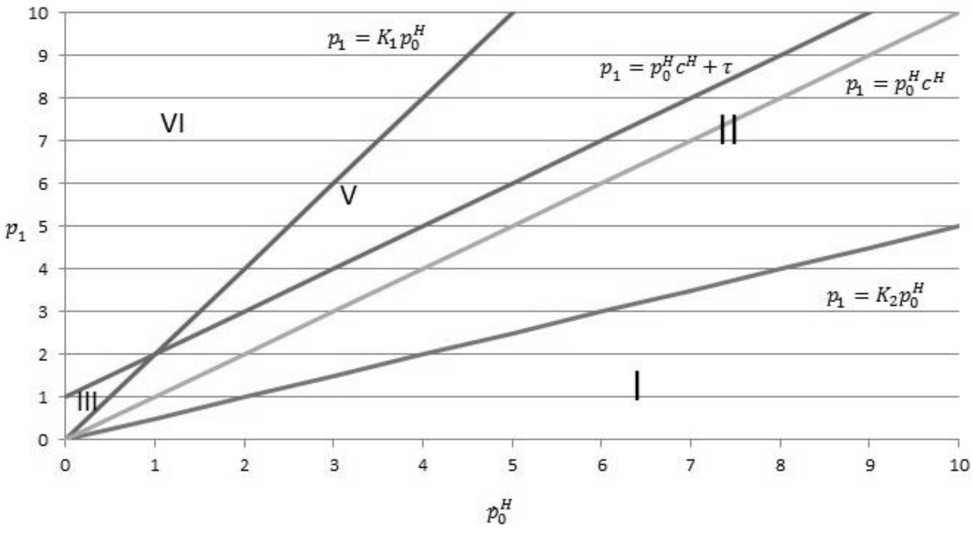

Рис. 1. График

Из (6) следует, что $p(0)$ принадлежит V. Тогда система (11) эквивалентна следующему:

$$\begin{cases} \frac{dp_0^H}{dt} = \gamma_0 \left(c^H M_y^p - \frac{p_1^p(t)}{p_0^H(t)} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j^H} \right) \\ \frac{dp_1^c}{dt} = \gamma_1 \left(\sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j^H} - M_y^p \right) \\ p(0) = p^* \end{cases} \tag{12}$$

Из соотношений (9) видно, что $\frac{dp_0^H}{dt} > 0, \frac{dp_1^p}{dt} < 0$ в области V. Следовательно, $p_0^H(t)$ возрастает, а $p_1^p(t)$ убывает всюду в V.

Из (12) видно, что $p_0^H(t)$ выпукла. Таким образом, траектория $p(t)$ будет представлять из себя выпуклую кривую, достигающую границу области II и V в некоторой точке на прямой $p_1 = p^{H_0} c^H + \tau$. Обозначим точку пересечения $p^{p*} = (p_0^{Hp*}, p_1^{p*})$ и момент времени пересечения $T: p(T) = p^{p*}$.

Таким образом, мы получаем, что производителю будет выгодно использовать компьютеризацию вместо человеческого труда только в том случае, когда прибыль, которую он получит от компьютеризации за время T, будет больше затрат на новую технологию:

$$\int_0^T V^p\left(p_0^H, p_1^p, y^p, 0, t\right) dt = \int_0^T \left(p_1^p(t) M_y^p - p_0^H(t) c^H M_y^p\right) dt =$$

$$\int_0^T \int_0^T \left[\gamma_1 \left(\overline{x}_j^H - \frac{p_1^p(t) - \tau}{p_1^p(t)} M_y^p \right) \right] M_y^p dt\, dt -$$

$$- \int_0^T \int_0^T \left[\gamma_0 \left(c^H M_y^p - \frac{p_1^p(t)}{p_0^H(t)} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x}_j^H \right) \right] c^H M_y^p dt\, dt \geq D$$

С учетом (8) и в предположениях окупаемости компьютеризации получаем следующие соотношения для общественного благосостояния и ВВП в состоянии конкурентного равновесия, т.е. во время T:

$$W^p = \sum_{j=1}^{m_H} U_j^H(p_0^{H*}, p_1^{p*}, \overline{x_j}^H) + \sum_{j=1}^{m_L} U_j^L(p_0^{L*} = 0, p_1^{p*}, \overline{x_j}^H) + V^p(p_0^{Hp*}, p_1^{p*}, y^{p*}, 0, T) =$$

$$\sum_{j=1}^{m_H} \left(U_j^H(\overline{x_j}^H) - \frac{p_1^{*p}\overline{x_j}^H}{p_0^{Hp*}} \right) + \frac{\tau y^{p*}}{p_1^{p*}} = \sum_{j=1}^{m_H} (K_1 \overline{x_j}^H - \frac{p_1^{p*}\overline{x_j}^H}{p_0^{Hp*}}) + \frac{\tau p_1^{p*}}{p_1^{p*}(p_1^{*p} - \tau)} \sum_{j=1}^{m_H} x_j^{H*} =$$

$$\left(K_1 - \frac{p_1^{p*}}{p_0^{Hp*}} \right) \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H + \frac{\tau}{p_1^{p*} - \tau} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H$$

$$G^p = p_1^{p*} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H + \frac{\tau p_1^{p*}}{p_1^{*p} - \tau} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H$$

Из этих соотношений для W из I модели и W^p из II видно, что возможна ситуация, когда общественное благосостояние в II модели будет больше, чем в I:

$$\frac{\tau}{p_1^{p*} - \tau} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H - \frac{p_1^{*p}}{p_0^{pH*}} \overline{x_j}^H > (K_1 - \frac{p_1^*}{p_0^{L*}} \overline{x_j}^L) \sum_{j=1}^{m_L} \overline{x_j}^L - \frac{p_1^*}{p_0^{H*}} \overline{x_j}^H$$

Это возможно в том случае, если объем труда, произведенного высокотехнологичными работниками из II модели, уменьшится по сравнению с объемом труда, произведенным высокотехнологичным работником из I модели, на величину равную разности между полезностью потребителей, которые производят низкотехнологичный труд из I модели, и полезностью потребителей, которые производят низкотехнологичный труд из II модели:

$$\sum_{j=1}^{m_H} l_j^{H*} - \sum_{j=1}^{m_H} l_j^{Hp*} > \sum_{j=1}^{m_L} U_j^L(p_0^{L*}, p_1^*, \overline{x_j}^L) - \sum_{j=1}^{m_L} U_j^{Lp}(p_1^{p*}, \overline{x_j}^L)$$

Из соотношений для G из I модели и G^p из II также видно, что возможна ситуация, когда ВВП в II модели будет больше, чем в I. Сделаем дополнительные преобразования:

$$G^p = \frac{p_1^{p*2}}{p_1^{*p} - \tau} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H$$

Если для G мы будем предполагать, что:

$$\sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H > \sum_{j=1}^{m_L} \overline{x_j}^L$$

Тогда:

$$G \le G' = 2p_1^* \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H$$

Получаем оценку для налога, которым облагается производство, при которой ВВП в II модели будет больше, чем в I:

$$p_0^L c^L > \tau > p_1^{p*}(1 - \frac{p_1^{p*}}{2p_1^*})$$

Если отдельно оценить полезность потребителей с различным типом труда из I и II модели, то для потребителей, производящих высокотехнологичный труд, полезность увеличится:

$$\sum_{j=1}^{m_H} U_j^{Hp}(p_0^{Hp*}, p_1^{p*}, \overline{x_j}^H) = (K_1 - \frac{p_1^{p*}}{p_0^{Hp*}}) \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H > (K_1 - \frac{p_1^*}{p_0^{H*}}) \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H = \sum_{j=1}^{m_H} U_j^H(p_0^{H*}, p_1^*, \overline{x_j}^H)$$

При этом увеличится она на величину равную:

$$\frac{p_0^{L*}c^L}{p_0^{H*}} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H - \frac{\tau}{p_0^{Hp*}} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H$$

т.к. $p_1^* = p_0^{H*}c^H + p^{L*}c^L, p_1^{p*} = p_0^{H*}c^H + \tau$.

Однозначно оценить полезность потребителей, производящих низкотехнологичный труд, для обеих моделей не удается:

$$\sum_{j=1}^{m_L} U_j^{Lp}(p_0^{Lp*} = 0, p_1^{p*}, \overline{x_j}^L) = \frac{\tau}{p_0^{Hp*}c^H} \sum_{j=1}^{m_H} \overline{x_j}^H \ ??? \ (K_1 - \frac{p_1^*}{p_0^{L*}}) \sum_{j=1}^{m_L} \overline{x_j}^L = \sum_{j=1}^{m_L} U_j^L(p_0^{L*}, p_1^*, \overline{x_j}^L)$$

8. Заключение

В данной работе было создано две различные модели игры с разнотипными потребителями и одним производителем. Первый вариант: два типа потребителей: один - производящие высокотехнологичный труд, а второй – низкотехнологичный. Во втором варианте – использование компьютеризации низкотехнологичного труда с налогом на производство для осуществления базовых выплат безработным. Были составлены функции полезности потребителей и производителей в обеих моделях, построены оптимальные стратегии каждого из участников экономической игры, найдено конкурентное равновесие в задачах.

В результате сравнения обеих моделей получились неоднозначные результаты. Для потребителей, которые производят высокотехнологичный труд, полезность существенно возросла, таким образом, можно сделать вывод, что компьютеризация на них оказала положительное влияние. Общественное благосостояние и ВВП при соблюдении определенных условий и выполнении ограничений тоже возрастает, что говорит нам о том, что внедрение новой технологии и компьютеризация человеческого труда имеет положительный эффект на экономическую систему в целом.

Список литературы / References

1 *Ашманов С.А.* Математические модели и методы в экономике // М: Издательство Московского Университета, (1980).
2 *Ашманов С.А*. Введение в математическую экономику // М.: Наука, 1984.
3 *Васин А.А., Морозов В.В*. Теория игр и модели математической экономики // Москва, «МАКСПресс», 2005.
4 *Морозов В.В.* Основы теории игр // Москва, Издательство факультета ВМК МГУ, 2002.
5 *Acemogl D.* Equilibrium bias of technology // «Econometrics», 2007.
6 *Romer P.M*. Endogenous technological change // Journal of political economy, 1990.
7 *Krugman P.R*. Technology, trade and factor prices // Journal of International Economics, 2000.
8 Economic and mathematical modeling and economic theory // «Economics and mathematical models», 2001.